VIII вјежбе

Парцијалне диференцијалне једначине

Елиптичке једначине

Примјена Фуријеовог метода за рјешавање елиптичких једначина је аналогна примјени за рјешавање хиперболичких и параболичких једначина.

1. Наћи рјешење Лапласове једначине на области $\Omega = \{(x,y) \mid 0<x<p,\ 0<y<s\}$ које задовољава следеће граничне услове

$$u(0,y)=u(p,y)=0 \quad , \quad 0<y<s$$
$$u(x,0)=0 \ , \ u(x,s)=f(x) \ , \quad 0<x<p$$

Рјешење:

Једначина коју рјешавамо је

$$u_{xx}+u_{yy}=0.$$

Претпоставимо да је $u(x,y)=X(x)Y(y)$. Добијамо:

$$X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=0$$
$$X(0)=X(p)=0$$
$$Y(0)=0$$

Одавде је

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\lambda, \text{ односно } \begin{aligned} X''(x)+\lambda X(x)&=0 \\ Y''(y)-\lambda Y(y)&=0 \end{aligned}$$

1° $\lambda<0$

Карактеристични полином је

$$k^2+\lambda=0$$
$$k^2=-\lambda$$
$$k=\pm\sqrt{-\lambda} \Rightarrow X(x)=c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x}+c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$X(0)=c_1+c_2=0 \Rightarrow c_2=-c_1$

$X(p)=c_1e^{\sqrt{-\lambda}p}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}p}=c_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}p}-e^{-\sqrt{-\lambda}p}\right) \Rightarrow c_1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow X(x)=0 \Rightarrow u(x,y)=0 \quad \times$

$2^\circ \quad \lambda=0 \Rightarrow X''(x)=0$

$X(x)=ax+b$

$$\left.\begin{array}{l} X(0)=b=0 \\ X(p)=ap=0 \Rightarrow a=0 \end{array}\right\} \Rightarrow X(x)=0 \Rightarrow u(x,y)=0 \quad \times$$

$3^\circ \quad \lambda>0$

Карактеристични полином је

$$k^2+\lambda=0$$

$$k^2=-\lambda$$

$$k=\pm i\sqrt{\lambda} \Rightarrow X(x)=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x$$

$X(0)=c_1=0$

$X(p)=c_2\sin\sqrt{\lambda}p=0$

За $c_2=0$, добијамо $X(x)=0$, тј. $u(x,y)=0$. Како нас занимају нетривијална решења, претпостављамо да је $c_2\neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}p=0 \Rightarrow \sqrt{\lambda_n}p=n\pi$

$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{p^2}$$

Дакле, $X_n(x)=c_{2n}\sin\frac{n\pi x}{p}$. Нађимо одговарајуће $Y_n(y)$.

Како је

$$Y_n''(y)-\lambda Y_n(y)=0$$

добијамо

$$k^2-\lambda_n=0$$

$$k^2=\lambda_n$$

$$k=\pm\sqrt{\lambda_n} \Rightarrow Y_n(y)=d_{1n}e^{\sqrt{\lambda_n}y}+d_{2n}e^{-\sqrt{\lambda_n}y}$$

$$Y_n(0) = d_{1n} + d_{2n} = 0 \Rightarrow d_{2n} = -d_{1n}$$

Дакле, $Y_n(y) = d_{1n}\left(e^{\sqrt{\lambda_n}\, y} - e^{-\sqrt{\lambda_n}\, y}\right)$

$$Y_n(y) = \underbrace{2d_{1n}}_{= e_{1n}} \frac{e^{\sqrt{\lambda_n}\, y} - e^{-\sqrt{\lambda_n}\, y}}{2}$$

$$Y_n(y) = e_{1n} \cdot \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n}\, y = e_{1n} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{p}$$

Опште решење $u(x,y)$ је задато са

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} e_{1n} \sin \frac{n\pi x}{p} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{p}$$

Означимо $c_{2n} e_{1n} = f_n$, и добијамо

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{n\pi x}{p} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{p}$$

Коефицијенте f_n добијамо из услова

$$u(x,s) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{n\pi x}{p} \cdot \operatorname{sh} \frac{n\pi s}{p} = f(x)$$

Ф-ју $f(x)$ треба развити по "синусима" на $[0,p]$, чиме се добија

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin \frac{n\pi x}{p} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \operatorname{sh} \frac{n\pi s}{p} \sin \frac{n\pi x}{p}$$

Па је $f_n \operatorname{sh} \frac{n\pi s}{p} = g_n$, односно $f_n = \dfrac{g_n}{\operatorname{sh} \frac{n\pi s}{p}}$.

2. Одредити рјешење проблема

$$\Delta u = 0$$
$$u_x(0,y)=0,\ u_x(2,y)=0,\ 0<y<1$$
$$u(x,0)=2,\ u(x,1)=3x,\ 0<x<2$$

на скупу $\{(x,y) \mid 0<x<2, 0<y<1\}$.

Рјешење: Уводимо смјену

$$u(x,y)=\vartheta(x,y)+2$$
$$\vartheta(x,y)=u(x,y)-2$$
$$\left.\begin{matrix}\vartheta_{xx}=u_{xx}\\ \vartheta_{yy}=u_{yy}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta\vartheta=\Delta u=0$$
$$u_x(0,y)=\vartheta_x(0,y)=0,\ u_x(2,y)=\vartheta_x(2,y)=0,\ 0<y<1$$
$$\vartheta(x,0)=u(x,0)-2=0,\ \vartheta(x,1)=u(x,1)-2=3x-2,\ 0<x<2$$

Дакле, рјешавамо

$$\Delta\vartheta=0$$
$$\vartheta_x(0,y)=\vartheta_x(2,y)=0,\ 0<y<1$$
$$\vartheta(x,0)=0,\ \vartheta(x,1)=3x-2,\ 0<x<2$$

Претпоставимо да је $\vartheta(x,y)=X(x)Y(y)$. Добијамо

$$X''(x)Y(y)+Y''(y)X(x)=0$$
$$X'(0)=X'(2)=0$$
$$Y(0)=0$$

Одавде је $\dfrac{X''(x)}{X(x)}=\dfrac{-Y''(y)}{Y(y)}=-\lambda$, односно $\begin{matrix}X''(x)+\lambda X(x)=0\\ Y''(y)-\lambda Y(y)=0\end{matrix}$

1° $\lambda<0$

Карактеристични полином је

$$k^2+\lambda=0$$
$$k^2=-\lambda$$
$$k=\pm\sqrt{-\lambda} \Rightarrow X(x)=c_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$
$$X'(x)=\sqrt{-\lambda}\,c_1e^{\sqrt{-\lambda}x}-\sqrt{-\lambda}\,c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$$X'(0)=\sqrt{-\lambda}\,c_1-\sqrt{-\lambda}\,c_2=0 \Rightarrow c_1=c_2$$
$$\left.\begin{array}{l} \\ X'(2)=\sqrt{-\lambda}\,c_1\left(e^{2\sqrt{-\lambda}}-e^{-2\sqrt{-\lambda}}\right)=0 \Rightarrow c_1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow X(x)=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow U(x,y)=0 \qquad \times$$

2° $\lambda=0$

Једначина постаје $X''(x)=0 \Rightarrow X(x)=ax+b$

$$X'(x)=a$$
$$X'(0)=X'(2)=a=0 \Rightarrow X(x)=b$$

Нађимо одговарајуће $Y(y)$.

$$Y''(y)=0 \Rightarrow Y(y)=cy+d$$
$$Y(0)=d=0 \Rightarrow Y(y)=cy$$
$$U(x,y)=X(x)Y(y)=bcy=By$$

гдје је $B=bc$.

3° $\lambda>0$

Карактеристични полином је

$$k^2+\lambda=0$$
$$k^2=-\lambda$$
$$k=\pm i\sqrt{\lambda} \Rightarrow X(x)=c_1\cos\sqrt{\lambda}\,x+c_2\sin\sqrt{\lambda}\,x$$
$$X'(x)=-c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,x+c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,x$$
$$X'(0)=c_2=0$$
$$X'(2)=-c_1\sqrt{\lambda}\sin 2\sqrt{\lambda}=0$$

За $c_1=0$ добијамо $X(x)=0$, па је $U(x,y)=0$. Нас занимају нетривијална рјешења, па је $c_1\neq 0 \Rightarrow \sin 2\sqrt{\lambda}=0 \Rightarrow 2\sqrt{\lambda_n}=n\pi$

$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{4}$$

Дакле $X_n(x)=c_{1n}\cos\frac{n\pi x}{2}$. Нађимо одговарајуће $Y_n(y)$.

Знамо да $Y_n(y)$ задовољава

$$Y_n''(y)-\lambda_n Y_n(y)=0$$

Карактеристични полином је

$$k^2-\lambda_n=0$$
$$k^2=\lambda_n$$
$$k=\pm\sqrt{\lambda_n} \Rightarrow Y_n(y)=d_{1n}e^{\sqrt{\lambda_n}y}+d_{2n}e^{-\sqrt{\lambda_n}y}$$

$$Y_n(0)=d_{1n}+d_{2n}=0 \Rightarrow d_{2n}=-d_{1n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_n(y)=2\cdot d_{1n}\left(\frac{e^{\sqrt{\lambda_n}y}-e^{-\sqrt{\lambda_n}y}}{2}\right)$$

$$Y_n(y)=e_n \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}y \quad , \text{ гдје је } e_n=2d_{1n}$$

Дакле, опште рјешење $\vartheta(x,y)$ је задато са

$$\vartheta(x,y)=By+\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)Y_n(y)=By+\sum_{n=1}^{\infty}c_{1n}e_n\cos\frac{n\pi x}{2}\operatorname{sh}\frac{n\pi y}{2}$$

Означимо $c_{1n}e_n=f_n$, добијамо

$$\vartheta(x,y)=By+\sum_{n=1}^{\infty}f_n\operatorname{sh}\frac{n\pi y}{2}\cos\frac{n\pi x}{2}$$

Коефицијенте B, f_n добијамо из услова

$$\vartheta(x,1)=B+\sum_{n=1}^{\infty}f_n\operatorname{sh}\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi x}{2}=3x-2$$

Дакле, ф-ју $f(x)=3x-2$ ћемо развити у Фуријев ред по "косинусима". Морамо је прво продужити парно на $[-2,2]$

$$F(x)=\begin{cases}3x-2, & 0\le x\le 2\\ -3x-2, & -2\le x<0\end{cases}$$

F - парна $\Rightarrow b_n=0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}F(x)dx=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(3x-2)dx=\left(\frac{3x^2}{2}-2x\right)\Big|_0^2=2$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}F(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\int_0^2(3x-2)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$= 3\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx - 2\int_0^2 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = *$$

$$\left[\int x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \left[\begin{matrix} u = x & d\vartheta = \cos\frac{n\pi x}{2}dx \\ du = dx & \vartheta = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} \end{matrix}\right] = \right.$$

$$\left. = \frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} - \frac{2}{n\pi}\int \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2} \right]$$

$$* = 3\left(\frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_0^2 - 2\left(\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_0^2 =$$

$$= 3\left(\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi - \frac{4}{n^2\pi^2}\right) = \frac{12}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

Дакле, $F(x) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos\frac{n\pi x}{2}$ на $[-2, 2]$, па

је $\vartheta(x, 1) = f(x) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos\frac{n\pi x}{2}$ на $[0, 2]$.

Добијамо

$$B + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \operatorname{sh}\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi x}{2} = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos\frac{n\pi x}{2}$$

па је $B = 2$, $f_n \operatorname{sh}\frac{n\pi}{2} = \frac{12}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)$

$$f_n = \frac{12}{n^2\pi^2 \operatorname{sh}\frac{n\pi}{2}}\left((-1)^n - 1\right)$$

Одавде је $\vartheta(x, y) = 2y + \frac{12}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \operatorname{sh}\frac{n\pi}{2}}\cos\frac{n\pi x}{2}\operatorname{sh}\frac{n\pi y}{2}$, па

је $u(x, y) = 2 + 2y + \frac{12}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \operatorname{sh}\frac{n\pi}{2}}\cos\frac{n\pi x}{2}\operatorname{sh}\frac{n\pi y}{2}$

3. Одредити рјешење проблема

$$\Delta u = 0$$
$$u_x(0,y) = u_x(1,y) = 0, \quad 0<y<1$$
$$u(x,0) = \cos \pi x, \quad u(x,1) = \cos 2\pi x, \quad 0<x<1$$

на скупу $\{(x,y) \mid 0<x<1, 0<y<1\}$.

Рјешење:

"Проблем" са којим се сусрећемо у овом задатку је што нам три гранична услова нису 0, већ само два. Зато растављамо $u(x,y)$ на

$$u(x,y) = \vartheta_1(x,y) + \vartheta_2(x,y)$$

гдје су ϑ_1 и ϑ_2 рјешења проблема

1) $$\Delta \vartheta_1 = 0$$
$$\vartheta_{1x}(0,y) = \vartheta_{1x}(1,y) = 0, \quad 0<y<1$$
$$\vartheta_1(x,0) = 0, \; \vartheta_1(x,1) = \cos 2\pi x, \quad 0<x<1$$

2) $$\Delta \vartheta_2 = 0$$
$$\vartheta_{2x}(0,y) = \vartheta_{2x}(1,y) = 0, \quad 0<y<1$$
$$\vartheta_2(x,0) = \cos \pi x, \; \vartheta_2(x,1) = 0, \quad 0<x<1$$

Ријешимо ове проблеме (добар дио рјешења је идентичан).

Претпоставимо да је $\vartheta_i(x,y) = X^i(x) Y^i(y), \; i=1,2$.

Добијамо

$$X^{i''}(x) Y^i(y) + Y^{i''}(y) X^i(x) = 0, \quad i=1,2$$
$$X^{i'}(0) = X^{i'}(1) = 0$$
$$Y^1(0) = 0, \; Y^2(1) = 0$$

Одавде је $\dfrac{X^{i''}(x)}{X^i(x)} = \dfrac{-Y^{i''}(y)}{Y^i(y)} = -\lambda$, односно
$$X^{i''}(x) + \lambda X^i(x) = 0$$
$$Y^{i''}(y) - \lambda Y^i(y) = 0, \quad i=1,2$$

1° $\lambda<0$

Карактеристични полином је

$$k^2+\lambda=0$$

$$k^2=-\lambda$$

$$k=\pm\sqrt{-\lambda} \Rightarrow X^i(x)=c_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$$X^{i'}(x)=\sqrt{-\lambda}c_1e^{\sqrt{-\lambda}x}-\sqrt{-\lambda}c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$$\left.\begin{array}{l} X^{i'}(0)=\sqrt{-\lambda}c_1-\sqrt{-\lambda}c_2=0 \Rightarrow c_2=c_1 \\ X^{i'}(1)=\sqrt{-\lambda}c_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}}-e^{-\sqrt{-\lambda}}\right)=0 \Rightarrow c_1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow X^i(x)=c$$

$$\Rightarrow \Theta^i(x,y)=0,\ i=1,2 \ \times$$

2° $\lambda=0$

Једначина постаје

$$X^{i''}(x)=0 \Rightarrow X^i(x)=a_ix+b_i$$

$$X^{i'}(x)=a$$

$$X^{i'}(0)=X^{i'}(1)=a=0 \Rightarrow X^i(x)=b_i\ ,\ i=1,2$$

Даље, $Y^{i''}(y)=0 \Rightarrow Y^i(y)=c_iy+d_i\ ,\ i=1,2$

$$Y^1(0)=d_1=0 \Rightarrow Y^1(y)=c_1y$$

$$Y^2(1)=c_2+d_2 \Rightarrow d_2=-c_2 \Rightarrow Y^2(y)=c_2(y-1)$$

Дакле, $\Theta^1(x,y)=b_1c_1y=B_1y$, $\Theta^2(x,y)=b_2c_2(y-1)=B_2(y-1)$, где је $B_1=b_1c_1$, $B_2=b_2c_2$.

3° $\lambda>0$

Карактеристични полином је

$$k^2+\lambda=0$$

$$k^2=-\lambda$$

$$k=\pm i\sqrt{\lambda} \Rightarrow X^i(x)=c_1^i\cos\sqrt{\lambda}x+c_2^i\sin\sqrt{\lambda}x,\ i=1,2$$

$$X^{i'}(x)=-\sqrt{\lambda}c_1^i\sin\sqrt{\lambda}x+\sqrt{\lambda}c_2^i\cos\sqrt{\lambda}x,\ i=1,2$$

$$X^{i'}(0)=\sqrt{\lambda}c_2^i=0 \Rightarrow c_2^i=0$$

$$X^{i\prime}(1) = -\sqrt{\lambda}\, c_1^i \sin\sqrt{\lambda} = 0$$

За $c_1^i = 0$ добијамо $X^i(x) = 0$, односно $\Theta^i(x,y) = 0$. Како нас занимају нетривијална рјешења, $c_1^i \neq 0 \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda_n} = n\pi$$

$$\lambda_n = n^2\pi^2$$

Дакле $X_n^i(x) = c_{1n}^i \cos n\pi x$. Нађимо одговарајуће $Y_n^i(y)$. Знамо да важи

$$Y_n^{i\prime\prime}(y) - \lambda_n Y_n^i(y) = 0$$

Карактеристични полином је

$$k^2 - \lambda_n = 0$$

$$k^2 = \lambda_n$$

$$k = \pm\sqrt{\lambda_n} \Rightarrow Y_n^i(y) = d_{1n}^i e^{\sqrt{\lambda_n} y} + d_{2n}^i e^{-\sqrt{\lambda_n} y}$$

Даље је $Y_n^1(0) = d_{1n}^1 + d_{2n}^1 = 0 \Rightarrow d_{2n}^1 = -d_{1n}^1$

$$Y_n^1(x) = 2 d_{1n}^1 \left(\frac{e^{\sqrt{\lambda_n} y} - e^{-\sqrt{\lambda_n} y}}{2}\right) = e_n^1 \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n} y, \text{ гдје је } e_n^1 = 2d_{1n}^1$$

$$Y_n^2(1) = d_{1n}^2 e^{\sqrt{\lambda_n}} + d_{2n}^2 e^{-\sqrt{\lambda_n}} = 0 \Rightarrow d_{2n}^2 = -d_{1n} e^{2\sqrt{\lambda_n}}$$

$$Y_n^2(y) = d_{1n}\left(e^{\sqrt{\lambda_n} y} - e^{2\sqrt{\lambda_n}} e^{-\sqrt{\lambda_n} y}\right)$$

$$Y_n^2(y) = 2d_{1n} e^{\sqrt{\lambda_n}}\left(\frac{e^{\sqrt{\lambda_n} y - \sqrt{\lambda_n}} - e^{\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_n} y}}{2}\right) = e_n^2 \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda_n} y - \sqrt{\lambda_n})$$

гдје је $e_n^2 = 2d_{1n} e^{\sqrt{\lambda_n}}$.

Дакле, општа рјешења су задата са

$$\Theta^1(x,y) = B_1 y + \sum_{n=1}^{\infty} X_n^1(x) Y_n^1(y) = B_1 y + \sum_{n=1}^{\infty} c_{1n}^1 e_n^1 \cos n\pi x \operatorname{sh} n\pi y$$

$$\Theta^2(x,y) = B_2(y-1) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n^2(x) Y_n^2(y) = B_2(y-1) + \sum_{n=1}^{\infty} c_{1n}^2 e_n^2 \cos n\pi x \operatorname{sh}(n\pi y - $$

Означимо $c_{1n}^1 e_n^1 = f_n^1$, $c_{1n}^2 e_n^2 = f_n^2$. Добијамо

$$\Theta^1(x,y) = B_1 y + \sum_{n=1}^{\infty} f_n^1 \cos n\pi x \operatorname{sh} n\pi y, \quad \Theta^2(x,y) = B_2(y-1) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \cos n\pi x \operatorname{sh}(n\pi(y$$

Коефицијенте $B_1, B_2, f_n^i, i=1,2$ добијамо из услова:

$$\left.\begin{aligned} v_1(x,1) &= B_1 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n^1 \cos n\pi x \,\mathrm{sh}\, n\pi = \cos 2\pi x \\ v_2(x,0) &= -B_2 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \cos n\pi x \,\mathrm{sh}(-n\pi) = \cos \pi x \end{aligned}\right\} *$$

Дакле, ф-је $\cos 2\pi x$ и $\cos \pi x$ треба развити у Фуријев ред на $[0,1]$ по "косинусима". Примијетимо да $\cos \pi x, \cos 2\pi x \in \{\cos n\pi x \mid n \in \mathbb{N}\}$, па ове ф-је не морамо развијати у Фуријев ред. Из $(*)$ добијамо

$$B_1 = 0,\; f_n^1 = 0,\ \text{за } n \neq 2,\quad f_2^1 \,\mathrm{sh}\, 2\pi = 1 \Rightarrow f_2^1 = \frac{1}{\mathrm{sh}\, 2\pi}$$

$$-B_2 = 0,\; f_n^2 = 0,\ \text{за } n \neq 1,\; -f_1^2 \,\mathrm{sh}\, \pi = 1 \Rightarrow f_1^2 = \frac{-1}{\mathrm{sh}\, \pi}$$

Дакле, $v_1(x,y) = \dfrac{1}{\mathrm{sh}\, 2\pi} \cos 2\pi x \,\mathrm{sh}\, 2\pi y$

$$v_2(x,y) = \frac{-1}{\mathrm{sh}\, \pi} \cos \pi x \,\mathrm{sh}(\pi y - \pi)$$

па је

$$u(x,y) = v_1(x,y) + v_2(x,y) = \frac{1}{\mathrm{sh}\, 2\pi} \cos 2\pi x \,\mathrm{sh}\, 2\pi y - \frac{1}{\mathrm{sh}\, \pi} \cos \pi x \,\mathrm{sh}(\pi y - \pi)$$

Знамо да је Лапласова једначина у $\mathbb{R}^2$ једначина
$u_{xx}+u_{yy}=0$.

Уведимо поларне координате:

$$\begin{rcases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{rcases} \Rightarrow \begin{array}{l} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x} \end{array}$$

Тада је:

$$u_r=u_x x_r+u_y y_r=\cos\varphi\, u_x+\sin\varphi\, u_y$$

$$u_{rr}=\cos\varphi(u_{xx}x_r+u_{xy}y_r)+\sin\varphi(u_{xy}x_r+u_{yy}y_r)$$

$$u_{rr}=\cos^2\varphi\, u_{xx}+2\sin\varphi\cos\varphi\, u_{xy}+\sin^2\varphi\, u_{yy}$$

$$u_\varphi=u_x x_\varphi+u_y y_\varphi=-r\sin\varphi\, u_x+r\cos\varphi\, u_y$$

$$u_{\varphi\varphi}=-r\cos\varphi\, u_x-r\sin\varphi(u_{xx}x_\varphi+u_{xy}y_\varphi)-r\sin\varphi\, u_y+$$
$$+r\cos\varphi\,(u_{xy}x_\varphi+u_{yy}y_\varphi)$$

$$u_{\varphi\varphi}=-r\cos\varphi\, u_x-r\sin\varphi\, u_y+r^2\sin^2\varphi\, u_{xx}-2r^2\sin\varphi\cos\varphi\, u_{xy}+$$
$$+r^2\cos^2\varphi\, u_{yy}$$

Одавде је

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,u_r)+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}=\frac{1}{r}u_r+u_{rr}+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}=$$

$$=\cancel{\frac{\cos\varphi}{r}}u_x+\cancel{\frac{\sin\varphi}{r}}u_y+\cos^2\varphi\, u_{xx}+2\cancel{\sin\varphi\cos\varphi}\, u_{xy}+\sin^2\varphi\, u_{yy}-$$

$$-\cancel{\frac{\cos\varphi}{r}}u_x-\cancel{\frac{\sin\varphi}{r}}u_y+\sin^2\varphi\, u_{xx}-2\cancel{\sin\varphi\cos\varphi}\, u_{xy}+\cos^2\varphi\, u_{yy}=$$

$$=u_{xx}+u_{yy}=0$$

Дакле, Лапласова једначина у поларним координатама има облик

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,u_r)+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}=0,$$ односно

$$\frac{1}{r}u_r+u_{rr}+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}=0$$